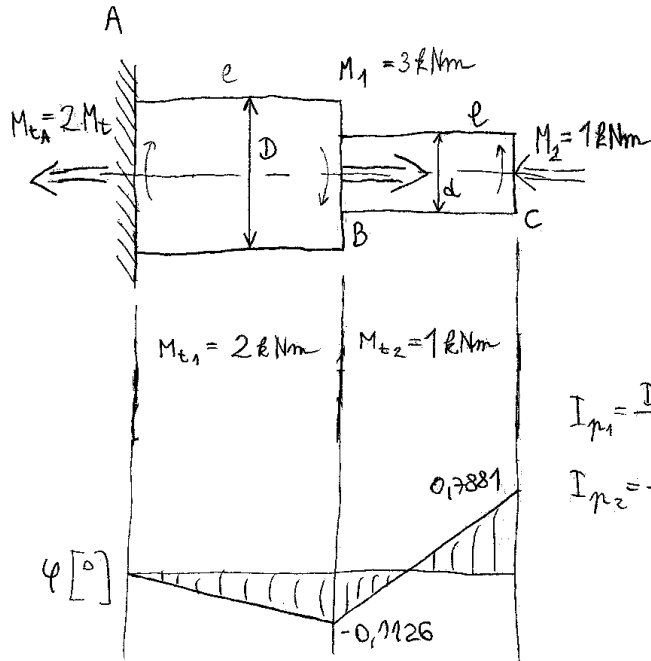


**1. példa:** Az 5 gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

Mekkora a nyomatékok hatására ébredő legnagyobb csúsztatófeszültség? Mekkora és milyen irányú az A, B és C keresztmetszet elfordulása? Számítsuk ki az alakváltozás munkáját!



$$d = 3 \text{ cm}$$

$$D = 2d = 6 \text{ cm}$$

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$\tau_{\max} = ? \quad \varphi = ? \quad W = ?$$

$$I_{p1} = \frac{D^4 \pi}{32} = \frac{60^4 \pi}{32} = 1,272 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{p2} = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{30^4 \pi}{32} = 7,952 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{M_{t1}}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{2 \cdot 10^6}{1,272 \cdot 10^6} \frac{60}{2} = 47,17 \text{ MPa} \\ \tau_2 &= \frac{M_{t2}}{I_{p2}} \frac{d}{2} = \frac{10^6}{7,952 \cdot 10^4} \frac{30}{2} = 188,6 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \tau_{\max} = \tau_2 = 188,6 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_{t1} l}{I_{p1} G} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 100}{1,272 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^3} = 1,965 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,1126^\circ \\ \varphi_2 &= \frac{M_{t2} l}{I_{p2} G} = \frac{10^6 \cdot 100}{7,952 \cdot 10^4 \cdot 80 \cdot 10^3} = 1,572 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,9007^\circ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= -\varphi_1 = -0,1126^\circ \\ \varphi_C &= -\varphi_1 + \varphi_2 = +0,7881^\circ \end{aligned}$$

$$W = \frac{M_{t1}^2 l}{2 I_{p1} G} + \frac{M_{t2}^2 l}{2 I_{p2} G} = \frac{l}{2G} \left( \frac{M_{t1}^2}{I_{p1}} + \frac{M_{t2}^2}{I_{p2}} \right) = \frac{0,1}{2 \cdot 80 \cdot 10^9} \left( \frac{2000^2}{1,272 \cdot 10^{-6}} + \frac{1000^2}{7,952 \cdot 10^{-8}} \right) = 9,825 \text{ J}$$

$$W = \frac{1}{2} M_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} M_2 (-\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2} 3000 \cdot 1,965 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} 1000 \cdot 1,3755 \cdot 10^{-2} = 9,825 \text{ J}$$

Megjegyzés:

A terhelő nyomatékok által végzett munkát is kiszámítottuk. A várakozásoknak megfelelően a szakaszokban tárolt rugalmas energiák összegével azonos eredményt kaptunk.

**2. példa:** Az 5 gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

Rajzoljuk meg a nyírófeszültség ábrát! Határozzuk meg a véglap elfordulásának irányát és szögét!

$M_1=350\text{ Nm}$     $M_2=200\text{ Nm}$     $M_3=100\text{ Nm}$

$G=80\text{ GPa}$

$\tau = ?$

$\varphi = ?$

$I_{p1} = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{20^4 \pi}{32} = 15708\text{ mm}^4$

$I_{p2} = I_{p3} = \frac{D^4 \pi}{32} = \frac{30^4 \pi}{32} = 72522\text{ mm}^4$

$\tau_1 = \frac{M_{c1}}{I_{p1}} \frac{d}{2} = \frac{50 \cdot 10^3}{15708} \frac{20}{2} = 31,83\text{ MPa}$

$\tau_2 = \frac{M_{c2}}{I_{p2}} \frac{D}{2} = \frac{300 \cdot 10^3}{72522} \frac{30}{2} = 62,05\text{ MPa}$

$\tau_3 = \frac{M_{c3}}{I_{p3}} \frac{D}{2} = \frac{100 \cdot 10^3}{72522} \frac{30}{2} = 20,68\text{ MPa}$

$M_{c1}=50\text{ Nm}$     $M_{c2}=300\text{ Nm}$     $M_{c3}=100\text{ Nm}$

$\tau [\text{MPa}]$

$\varphi_1 = \frac{M_{c1} l_1}{I_{p1} G} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 300}{15708 \cdot 80 \cdot 10^3} = 1,194 \cdot 10^{-2}\text{ rad} = 0,6839^\circ$

$\varphi_2 = \frac{M_{c2} l_2}{I_{p2} G} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 300}{72522 \cdot 80 \cdot 10^3} = 1,551 \cdot 10^{-2}\text{ rad} = 0,8888^\circ$

$\varphi_3 = \frac{M_{c3} l_3}{I_{p3} G} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 300}{72522 \cdot 80 \cdot 10^3} = 5,171 \cdot 10^{-3}\text{ rad} = 0,2963^\circ$

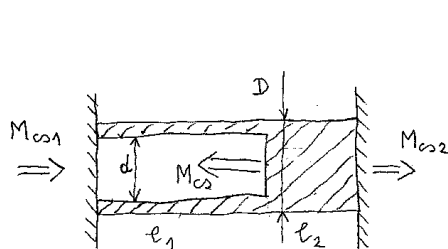
$\varphi = +\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 0,6839 - 0,8888 - 0,2963 = -0,5462^\circ$  (←)

Megjegyzés:

Sajnos az  $I_{p2}$  és  $I_{p3}$  értéket nem sikerült helyesen kiszámítanom. Emiatt az ettől függő további értékek is rosszak. Rövidesen javítani fogom a számításokat...

**3. példa:** Az 5 gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

Számítsuk ki a csavarónyomaték hatására ébredő legnagyobb nyírófeszültséget! Mekkora a furat alján lévő K keresztmetszet szögelfordulása? Számítsuk ki az alakváltozás és a csavarónyomaték munkáját!



$$\begin{aligned} d &= 8 \text{ mm} & G &= 80 \text{ GPa} \\ D &= 10 \text{ mm} & M_{\cos} &= 30 \text{ Nm} \\ l_1 &= 10 \text{ cm} & \tau_{\max} &=? \\ l_2 &= 5 \text{ cm} & \varphi_K &=? \\ & & W &=? \end{aligned}$$

$$I_{p1} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} = \frac{(10^4 - 8^4) \pi}{32} = 579,6 \text{ mm}^4$$

$$I_{p2} = \frac{D^4 \pi}{32} = \frac{10^4 \pi}{32} = 981,7 \text{ mm}^4$$

$$1.) M_{\cos} = M_{\cos1} + M_{\cos2}$$

$$2.) \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_K$$

$$\frac{M_{\cos1} l_1}{I_{p1} G} = \frac{M_{\cos2} l_2}{I_{p2} G}$$

$$1.) M_{\cos2} = M_{\cos} - M_{\cos1}$$

$$1 \rightarrow 2.) \frac{M_{\cos1} l_1}{I_{p1} G} = \frac{(M_{\cos} - M_{\cos1}) l_2}{I_{p2} G}$$

$$M_{\cos1} = \frac{M_{\cos} \frac{l_2}{I_{p2}}}{\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}}} = \frac{M_{\cos}}{1 + \frac{l_1}{l_2} \frac{I_{p2}}{I_{p1}}} = \frac{30}{1 + \frac{10}{5} \frac{981,7}{579,6}} = 6,838 \text{ Nm}$$

$$1.) M_{\cos2} = 30 - 6,838 = 23,16 \text{ Nm}$$

$$\tau_{1\min} = \frac{M_{\cos1}}{I_{p1}} \frac{d}{2} = \frac{6,838 \cdot 10^3}{579,6} \frac{8}{2} = 47,19 \text{ MPa}$$

$$\tau_{1\max} = \frac{M_{\cos1}}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{6,838 \cdot 10^3}{579,6} \frac{10}{2} = 58,99 \text{ MPa}$$

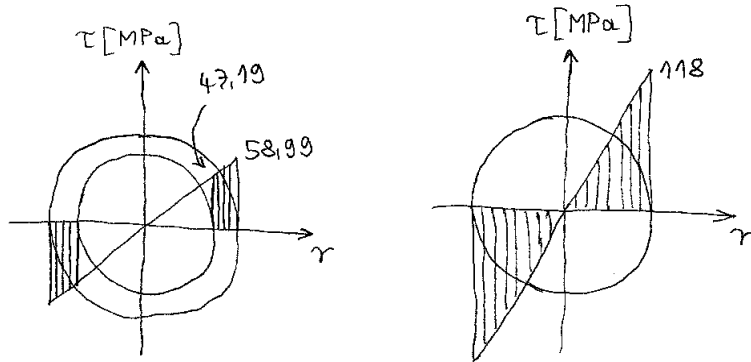
$$\tau_{2\max} = \frac{M_{\cos2}}{I_{p2}} \frac{D}{2} = \frac{23,16 \cdot 10^3}{981,7} \frac{10}{2} = 118,0 \text{ MPa}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \tau_{2\max} = 118 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\varphi_K = \varphi_1 = \frac{M_{\omega 1} \ell_1}{I_{p1} G} = \frac{6,838 \cdot 10^3 \cdot 100}{579,6 \cdot 80 \cdot 10^3} = 1,475 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,8450^\circ}$$

$$\boxed{W = \frac{M_{\omega 1}^2 \ell_1}{2 I_{p1} G} + \frac{M_{\omega 2}^2 \ell_2}{2 I_{p2} G} = \frac{6,838^2 \cdot 0,1}{2 \cdot 579,6 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 10^3} + \frac{23,16^2 \cdot 0,05}{2 \cdot 981,7 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 10^3} = 0,2212 \text{ J}}$$

$$\boxed{W = W_{m\omega} = \frac{1}{2} M_{\omega} \varphi_K = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1,475 \cdot 10^{-2} = 0,2215 \text{ J}}$$



Megjegyzés:

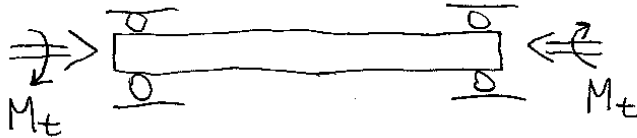
Szerencsére a két munka egyenlő lett.

**4. példa:** Egy forgó tengelyes példa.

Az  $n = 120 \frac{1}{\text{min}}$  fordulatszámmal járó tengelynek  $P = 150 \text{ kW}$  teljesítményt kell átvinnie.

Határozzuk meg a tengely átmérőjét, ha az anyagára  $\tau_{\text{max}} = 20 \text{ MPa}$  feszültséget engednek meg!

(F.7.)



$$P = 150 \text{ kW}$$

$$n = 120 \frac{1}{\text{min}}$$

$$\tau_{\text{meg}} = 20 \text{ MPa}$$

$$d = ?$$

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \frac{120}{60} = 12,57 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$P = M_t \omega \rightarrow M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{150 \cdot 10^3}{12,57} = 11933 \text{ Nm}$$

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_p} r$$

$$\tau_{\text{meg}} \geq \tau\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{M_t}{I_t} \frac{d}{2} = \frac{M_t}{\frac{d^4 \pi}{32}} \frac{d}{2} = \frac{16 M_t}{d^3 \pi}$$

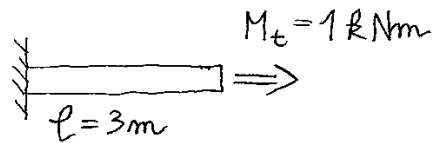
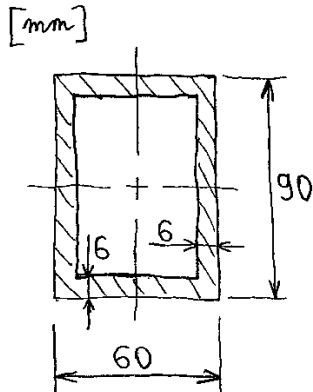
$$\boxed{d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\tau_{\text{meg}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 11933 \cdot 10^3}{20 \cdot \pi}} = 144,9 \text{ mm}}$$

## Zárt, vékonyfalú szelvényekkel kapcsolatos feladatok

## 5. példa:

Számítsuk ki a vékonyfalú, zárt szelvényben ébredő legnagyobb feszültséget! Mekkora a rúd vég elcsavarodása?

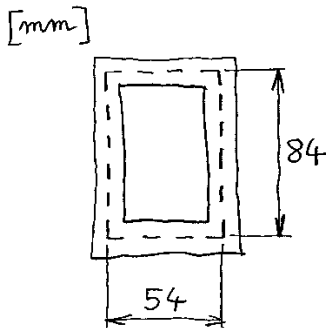
F8



$$G = 0,8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = ?$$

$$\varphi = ?$$



$$I_t = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{ds}{r}}$$

$$A_k = 54 \cdot 84 = 4536 \text{ mm}^2$$

$$\oint \frac{ds}{r} = \sum \frac{s_i}{r_i} = \frac{54}{6} + \frac{84}{6} + \frac{54}{6} + \frac{84}{6} = 46$$

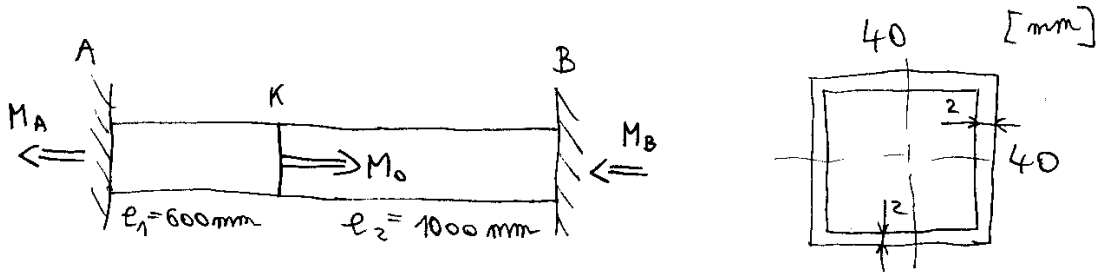
$$I_t = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{ds}{r}} = \frac{4 \cdot 4536^2}{46} = 1,789 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 A_k r_{\min}} = \frac{10^6}{2 \cdot 4536 \cdot 6} = 18,37 \text{ MPa}$$

$$\varphi = \frac{M_t l}{I_t G} = \frac{10^6 \cdot 3000}{1,789 \cdot 10^6 \cdot 0,8 \cdot 10^5} = 0,02096 \text{ rad} = 1,201^\circ$$

**6. példa:** Az 5. gyakorlat 3. példájához hasonló feladat.

Számítsuk ki a reakciókat! Mekkora a K keresztmetszet szögelfordulása?



$$1.) \sum M_K = 0 = M_0 - M_A - M_B$$

$$2.) \varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \frac{M_A l_1}{I_p G} = \frac{M_B l_2}{I_p G}$$

$$M_0 = 900 \text{ Nm}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$M_A = ? \quad M_B = ?$$

$$\varphi_K = ?$$

$$A_k = (40 - 2)^2 = 1444 \text{ mm}^2$$

$$\oint \frac{ds}{r} = \frac{38}{2} \cdot 4 = 76$$

$$I_p = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{ds}{r}} = \frac{4 \cdot 1444^2}{76} = 109744 \text{ mm}^4$$

04.01.06. 3B.

$$1.) M_B = M_0 - M_A$$

$$1 \rightarrow 2.) M_A l_1 = (M_0 - M_A) l_2$$

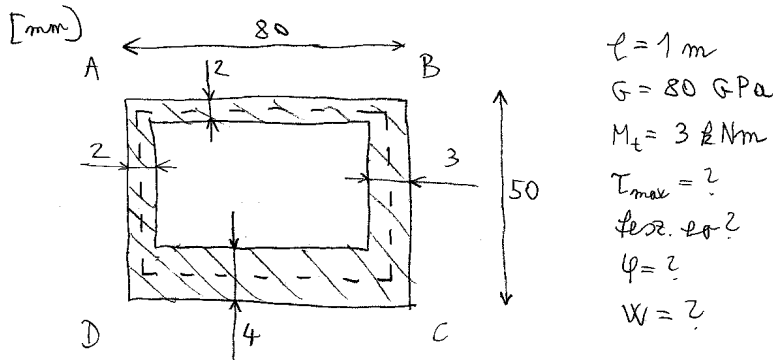
$$\boxed{M_A = \frac{M_0 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{M_0}{1 + \frac{l_1}{l_2}} = \frac{900}{1 + \frac{600}{1000}} = 562,5 \text{ Nm}}$$

$$1.) \boxed{M_B = M_0 - M_A = 900 - 562,5 = 337,5 \text{ Nm}}$$

$$2.) \boxed{\varphi_K = \varphi_1 = \frac{M_A l_1}{I_p G} = \frac{562,5 \cdot 10^3 \cdot 600}{109744 \cdot 80 \cdot 10^3} = 3,844 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 2,203^\circ}$$

## 7. példa:

Mekkora a megadott vékonyfalú, zárt keresztmetszetű, 1m hosszúságú rúd elcsavarodása? Számítsuk ki az alakváltozás és a csavarónyomaték munkáját! Ábrázoljuk a keresztmetszetben kialakuló feszültségeloszlást!



$$A_R = \left(80 - \frac{2+3}{2}\right) \left(50 - \frac{2+4}{2}\right) = 77,5 \cdot 47 = 3642,5 \text{ mm}^2$$

$$\oint \frac{ds}{r} = \frac{77,5}{2} + \frac{47}{3} + \frac{77,5}{4} + \frac{47}{2} = 97,29$$

$$I_t = \frac{4 A_R^2}{\oint \frac{ds}{r}} = \frac{4 \cdot 3642,5^2}{97,29} = 5,455 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\phi = \frac{M_t l}{I_t G} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 1000}{5,455 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^3} = 0,06874 \text{ rad} = 3,94^\circ$$

$$W = \frac{1}{2} M_t \phi = \frac{1}{2} \cdot 3000 \cdot 0,06874 = 102,7 \text{ J}$$

$$W = \frac{M_t^2 l}{2 I_t G} = \frac{3000^2 \cdot 1}{2 \cdot 5,455 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^3} = 103,1 \text{ J}$$

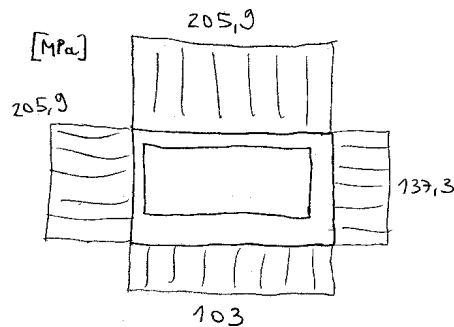
$$\tau = \frac{M_t}{2 A_R r}$$

$$\tau_{AB} = \tau_{AD} = \frac{3 \cdot 10^6}{2 \cdot 3642,5 \cdot 2} = \frac{411,8}{2} = 205,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{411,8}{3} = 137,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CD} = \frac{411,8}{4} = 103 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 A_R r_{\min}} = 205,9 \text{ MPa}$$



Megjegyzés:

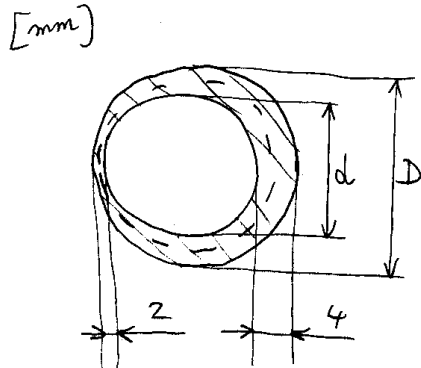
A kétféleképpen számított munka a kerekítések miatt csak közelítőleg egyenlő.

A nyírófeszültség a falvastagság függvénye.



**8. példa:** Félrefúrás.

Egy csőkeresztmetszetet gyártása az ábrán látható módon szaródott el: a lyuk félrement. Mekkora csavarónyomatékkal terhelhetjük a selejtes csövet?



$$D = 100 \text{ mm}$$

$$d = 94 \text{ mm}$$

$$\tau_{meg} = 80 \text{ MPa}$$

$$M_t = ?$$

$$\tau = \frac{M_t}{2 A_k r}$$

$$\tau_{meg} = \frac{M_t}{2 A_k r_{min}}$$

$$A_k = \frac{d^2 \pi}{4} = \left( \frac{D+d}{2} \right)^2 \frac{\pi}{4} = \left( \frac{100+94}{2} \right)^2 \frac{\pi}{4} = 7390 \text{ mm}^2$$

$$r_{min} = 2 \text{ mm}$$

$$M_t = 2 A_k r_{min} \tau_{meg} = 2 \cdot 7390 \cdot 2 \cdot 80 = 2,365 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 2365 \text{ Nm}$$

Megjegyzés:

A középvonal átmérőjét a belső és a külső átmérő átlagaként vesszük fel.

A megengedett feszültség a minimális falvastagság helyén alakulhat ki, mert az a maximális feszültség helye.

Ha nagyon ráérünk, akkor kiszámolhatjuk, hogy mennyit bírna egy rendszeren legyártott cső, vagyis ha a közepére sikerül a lyuk.

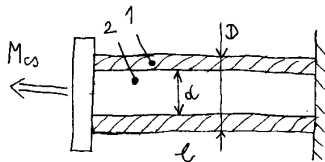
Az óra 1. példájához hasonló feladat:

Ábrázoljuk a hossz mentén a feszültséget, és határozzuk meg a végkeresztmetszet elcsavarodási szögét és irányát!

## További vegyes feladatok, többnyire méretezések

## 9. példa:

Az acél csőben egy réz rúd van. A csavarónyomaték megoszlik a két alkatrész között. Mekkora a véglap elfordulása? Ábrázoljuk a feszültségeloszlást az alkatrészekben!



$$d = 3 \text{ cm}$$

$$D = 5 \text{ cm}$$

$$l = 0,5 \text{ m}$$

$$G_1 = 80 \text{ GPa}$$

$$G_2 = 60 \text{ GPa}$$

$$M_{cs} = 3 \text{ kNm}$$

$$\varphi = ?$$

$$\tau\text{-eloszlás?}$$

$$1.) M_{cs} = M_{cs1} + M_{cs2}$$

$$2.) \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{M_{cs1} l}{I_{p1} G_1} = \frac{M_{cs2} l}{I_{p2} G_2}$$

$$2a.) M_{cs1} = \frac{\varphi I_{p1} G_1}{l}$$

$$2b.) M_{cs2} = \frac{\varphi I_{p2} G_2}{l}$$

$$1.) M_{cs} = \frac{\varphi I_{p1} G_1}{l} + \frac{\varphi I_{p2} G_2}{l}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{M_{cs} l}{I_{p1} G_1 + I_{p2} G_2} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 500}{534071 \cdot 80 \cdot 10^3 + 79522 \cdot 60 \cdot 10^3} = 3,158 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,809^\circ}$$

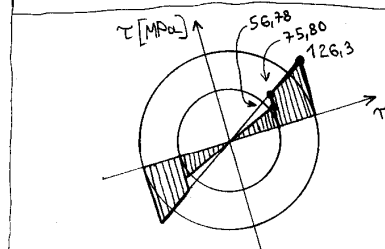
$$2a.) M_{cs1} = \frac{3,158 \cdot 10^{-2} \cdot 534071 \cdot 80 \cdot 10^3}{500} = 2,699 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 2699 \text{ Nm}$$

$$1.) M_{cs2} = M_{cs} - M_{cs1} = 3000 - 2699 = 301 \text{ Nm}$$

$$\tau_{1,min} = \frac{M_{cs1}}{I_{p1}} \frac{d}{2} = \frac{2699 \cdot 10^3}{534071} \frac{30}{2} = 75,80 \text{ MPa}$$

$$\tau_{1,max} = \frac{M_{cs1}}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{2699 \cdot 10^3}{534071} \frac{50}{2} = 126,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2,max} = \frac{M_{cs2}}{I_{p2}} \frac{d}{2} = \frac{301 \cdot 10^3}{79522} \frac{30}{2} = 56,78 \text{ MPa}$$



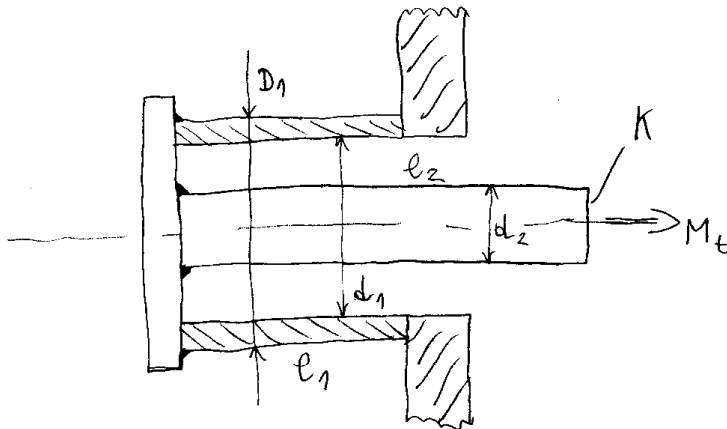
## Megjegyzés:

Az egyenletrendszer úgy is megoldhattuk volna, hogy az 1. egyenletből kifejezzük az  $M_{cs2}$  reakciónyomatékot, és behelyettesítjük a 2. egyenletbe. A gyakorlaton ezt a módszert alkalmaztuk. A feszültségeloszlást azért rajzoltam ilyen ferdére, hogy lássuk, hogy az nem csak a koordinátatengelyek mentén érvényes, hanem bárhol a sugár mentén.

A merevségi viszonyok olyanok, hogy a tömör rész szélső szálában kisebb a feszültség, mint a cső belső szálában. Ha a tömör rész erősebb lenne (pl. nagyobb  $G$ ), akkor ez a viszony megfordulhatna, és a belső rész nyomatékaránya is nagyobb lenne.

**10. példa:** Méretezés.

Az ábra egy rögzített (befogott) csövet (1), egy ráhegesztett, végtelen merevnek tekinthető tárcsát és a tárcsához hegesztett rudat (2) ábrázol. Mekkora lehet a rúd végére ható  $M_t$  csavarónyomaték, ha a csúsztatófeszültség egyik alkatrészben sem lépheti túl a megengedett értéket? Mekkora lesz így a rúd vég szögelfordulása? Ábrázoljuk a nyírófeszültség-eloszlást!



$$D_1 = 80 \text{ mm}$$

$$d_1 = 68 \text{ mm}$$

$$d_2 = 56 \text{ mm}$$

$$l_1 = 200 \text{ mm}$$

$$l_2 = 300 \text{ mm}$$

$$\tau_{\text{meg}} = 55 \text{ MPa}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$M_t = ? \quad \varphi_K = ?$$

$$I_{p1} = \frac{(D_1^4 - d_1^4) \pi}{32} = \frac{(80^4 - 68^4) \pi}{32} = 1,922 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{p2} = \frac{d_2^4 \pi}{32} = \frac{56^4 \pi}{32} = 9,655 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r \rightarrow M_{t, \text{meg}} = \frac{\tau_{\text{meg}} I_p}{r}$$

$$M_{t1, \text{meg}} = \frac{\tau_{\text{meg}} I_{p1}}{D_1/2} = \frac{55 \cdot 1,922 \cdot 10^6}{80/2} = 2,643 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{t2, \text{meg}} = \frac{\tau_{\text{meg}} I_{p2}}{d_2/2} = \frac{55 \cdot 9,655 \cdot 10^5}{56/2} = 1,897 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{t2, \text{meg}} < M_{t1, \text{meg}} \rightarrow \boxed{M_t = M_{t2, \text{meg}} = 1897 \text{ Nm}}$$

Megjegyzés:

Első lépésben kiszámítottuk, hogy mekkora csavarónyomaték kell ahhoz, hogy az egyes alkatrészek szélső szálában elérjük a megengedett feszültséget. Ezen értékek közül a kisebb lesz a megengedett, mert ekkor az egyik alkatrész a tönkremenetel határáig terhelődik, a másikban pedig a megengedettnél kisebb feszültség ébred.

A végkeresztmetszet szögelfordulása a két szakaszon kialakuló szögelfordulások összege:

$$\boxed{\varphi_K = \frac{M_t \ell_1}{I_{p1} G} + \frac{M_t \ell_2}{I_{p2} G} = \frac{M_t}{G} \left( \frac{\ell_1}{I_{p1}} + \frac{\ell_2}{I_{p2}} \right) = \frac{1,897 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3} \left( \frac{200}{1,922 \cdot 10^6} + \frac{300}{9,655 \cdot 10^5} \right)}$$

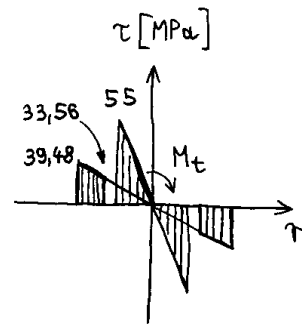
$$= 9,835 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = \underline{0,5635^\circ}$$

A feszültségeloszlások:

$$\tau_{1max} = \frac{M_t}{I_{p1}} \frac{D_1}{2} = \frac{1897 \cdot 10^3}{1,922 \cdot 10^6} \frac{80}{2} = 39,48 \text{ MPa}$$

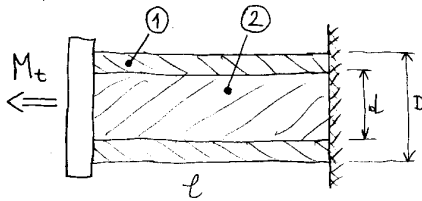
$$\tau_{1min} = \frac{M_t}{I_{p1}} \frac{D_2}{2} = \frac{1897 \cdot 10^3}{1,922 \cdot 10^6} \frac{68}{2} = 33,56 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2max} = \frac{M_t}{I_{p2}} \frac{d_1}{2} = \tau_{meg} = 55 \text{ MPa}$$



## 11. példa: Méretezés.

Mindkét anyagra ismerjük a megengedett legnagyobb feszültség értékét. Mekkora nyomaték fogja terhelni az alkatrészeket, ha sehol nem lépjük túl a megengedett feszültséget? Mekkora lesz így a teljes csavarónyomaték és a szögelfordulás? Végül felrajzoljuk a feszültségeloszlást is.



$$d = 50 \text{ mm} \quad l = 0,5 \text{ m}$$

$$D = 76 \text{ mm}$$

$$\tau_{meg1} = 70 \text{ MPa} \quad G_1 = 25 \text{ GPa}$$

$$\tau_{meg2} = 120 \text{ MPa} \quad G_2 = 80 \text{ GPa}$$

$$M_t = ? \quad M_{t1} = ? \quad M_{t2} = ?$$

$$\varphi = ? \quad \text{fesz. eo. ?}$$

$$1.) M_t = M_{t1} + M_{t2}$$

$$I_{p1} = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32} = \frac{(76^4 - 50^4)\pi}{32} = 2,662 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$2.) \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{M_{t1} l}{I_{p1} G_1} = \frac{M_{t2} l}{I_{p2} G_2}$$

$$I_{p2} = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{50^4 \pi}{32} = 6,136 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$3.) \tau_1 = \frac{M_{t1}}{I_{p1}} \frac{D}{2}$$

$$4.) \tau_2 = \frac{M_{t2}}{I_{p2}} \frac{d}{2}$$

$$3.) \frac{M_{t1}}{I_{p1}} = \frac{2 \tau_1}{D} \quad 4.) \frac{M_{t2}}{I_{p2}} = \frac{2 \tau_2}{d}$$

$$3 \rightarrow 2.) \varphi_{meg} = \frac{2 \tau_{meg} l}{D G_1} = \frac{2 \cdot 70 \cdot 500}{76 \cdot 25 \cdot 10^3} = 3,684 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$4 \rightarrow 2.) \varphi_{2meg} = \frac{2 \tau_{meg} l}{d G_2} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 500}{50 \cdot 80 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\boxed{\varphi = \min \{ \varphi_1, \varphi_2 \} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,719^\circ}$$

$$2.) \boxed{M_{t1} = \frac{\varphi I_{p1} G_1}{l} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 2,662 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^3}{500} = 3,993 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 3993 \text{ Nm}}$$

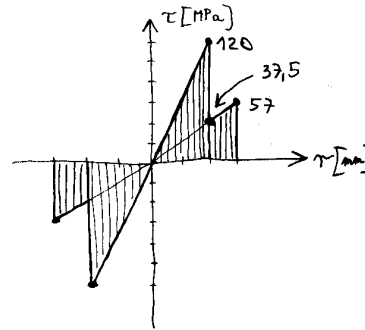
$$\boxed{M_{t2} = \frac{\varphi I_{p2} G_2}{l} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 6,136 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^3}{500} = 2,945 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 2945 \text{ Nm}}$$

$$\boxed{M_t = M_{t1} + M_{t2} = 3993 + 2945 = 6938 \text{ Nm}}$$

$$\tau_{1max} = \frac{M_{t1}}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{3993 \cdot 10^3}{2,662 \cdot 10^6} \frac{76}{2} = 57 \text{ MPa}$$

$$\tau_{1min} = \frac{M_{t1}}{I_{p1}} \frac{d}{2} = \frac{3993 \cdot 10^3}{2,662 \cdot 10^6} \frac{50}{2} = 37,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2max} = \tau_{2meg} = 120 \text{ MPa}$$



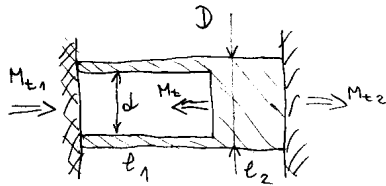
## Megjegyzés:

Négy egyenletet tudunk felírni: a nyomatéki egyensúlyt, a két szakasz elcsavarodásának egyenlőségét, és két egyenletet a szélső szálak feszültségére. Első lépésben meghatározzuk, hogy mekkora szögelfordulásnál érjük el a megengedett feszültséget az alkatrészek szélső szálában. Ezek közül a kisebbik esetén az egyik alkatrész a határig terhelődik, a másikban pedig a megengedettnél kisebb feszültség ébred. Ehhez a szöghöz kiszámoljuk a résznyomatékokat. A keresett  $M_t$  ezek összegeként adódik.

A merevségi viszonyok olyanok, hogy a tömör rész szélső szálában nagyobb a feszültség, mint a cső belső szálában.

## 12. példa: Méretezés.

Határozzuk meg az  $M_t$  nyomatékokat úgy, hogy az anyagra megengedett legnagyobb feszültséget sehol ne lépjük túl! Mekkora ebben az esetben az  $M_t$  nyomaték helyén lévő K keresztmetszet elcsavarodása?



$$\begin{aligned} d &= 8 \text{ mm} & G &= 80 \text{ GPa} \\ D &= 10 \text{ mm} & \tau_{\text{meg}} &= 40 \text{ MPa} \\ l_1 &= 100 \text{ mm} & M_t &= ? \\ l_2 &= 50 \text{ mm} & \varphi_K &= ? \end{aligned}$$

$$I_{p1} = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32} = \frac{(10^4 - 8^4)\pi}{32} = 579,6 \text{ mm}^4$$

$$I_{p2} = \frac{D^4\pi}{32} = \frac{10^4\pi}{32} = 981,7 \text{ mm}^4$$

$$1.) \sum M_t = 0 = M_{t1} - M_t + M_{t2}$$

$$2.) \varphi_K = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{M_{t1} l_1}{I_{p1} G} = \frac{M_{t2} l_2}{I_{p2} G}$$

$$3.) \tau_1 = \frac{M_{t1}}{I_{p1}} \frac{D}{2}$$

$$4.) \tau_2 = \frac{M_{t2}}{I_{p2}} \frac{D}{2}$$

$$3.) \frac{M_{t1}}{I_{p1}} = \frac{2 \tau_1}{D}$$

$$\tau_1 = \tau_{\text{meg}}; 3 \rightarrow 2)$$

$$\varphi_K^{(1)} = \frac{2 \tau_{\text{meg}}}{D} \frac{l_1}{G} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 100}{10 \cdot 80 \cdot 10^3} = 0,01 \text{ rad}$$

$$4.) \frac{M_{t2}}{I_{p2}} = \frac{2 \tau_2}{D}$$

$$\tau_2 = \tau_{\text{meg}}; 4 \rightarrow 2)$$

$$\varphi_K^{(2)} = \frac{2 \tau_{\text{meg}}}{D} \frac{l_2}{G} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 50}{10 \cdot 80 \cdot 10^3} = 0,005 \text{ rad}$$

$$\varphi_K = \min\{\varphi_K^{(1)}, \varphi_K^{(2)}\} = 0,005 \text{ rad} = 0,2865^\circ$$

$$1.) M_t = M_{t1} + M_{t2}$$

$$2.) M_{t1} = \frac{I_{p1} G}{l_1} \varphi_K \quad M_{t2} = \frac{I_{p2} G}{l_2} \varphi_K$$

$$2.) \rightarrow 1.)$$

$$M_t = G \varphi_K \left( \frac{I_{p1}}{l_1} + \frac{I_{p2}}{l_2} \right)$$

$$M_t = 80 \cdot 10^3 \cdot 0,005 \left( \frac{579,6}{100} + \frac{981,7}{50} \right)$$

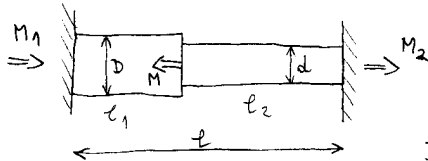
$$M_t = 10172 \text{ Nmm} = 10,172 \text{ Nm}$$

Megjegyzés:

Négy egyenletet tudunk felírni: a nyomatéki egyensúlyt, a két szakasz elcsavarodásának egyenlőségét, és két egyenletet a szélső szálak feszültségére. Először mindkét szakaszra kiszámítjuk, hogy mekkora szögelfordulás jön létre, ha a feszültség éppen a megengedett. Ezek közül a kisebbiket kell választanunk. Végül kiszámoljuk erre az esetre a két résznyomatékokat. Az  $M_t$  ezek összege lesz.

## 13. példa: Méretezés.

A rúd teljes hossza adott. Válasszuk meg úgy az  $\ell_1$  és  $\ell_2$  méreteket, hogy mindkét szakaszon azonos feszültség ébredjen a szélső szálban! Mekkora az így kialakuló maximális feszültség, és mekkorák a reakciónyomatékok?



$$\begin{aligned} D &= 100 \text{ mm} & \ell_1 = ? & \ell_2 = ? \\ d &= 80 \text{ mm} & \tau_{\max} &= ? \\ M &= 20 \text{ kNm} & M_1 = ? & M_2 = ? \\ \ell &= 90 \text{ mm} & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{p1} &= \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 100^4}{32} = 9,817 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_{p2} &= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 80^4}{32} = 4,021 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$1.) \sum M = 0 \Rightarrow M = M_1 + M_2$$

$$2.) \ell = \ell_1 + \ell_2$$

$$3.) \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \frac{M_1 \ell_1}{I_{p1} G} = \frac{M_2 \ell_2}{I_{p2} G}$$

$$4.) \tau_1 = \tau_2 = \tau_{\max}$$

$$\frac{M_1}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{M_2}{I_{p2}} \frac{d}{2}$$

$$4.) \frac{M_2}{I_{p2}} = \frac{M_1}{I_{p1}} \frac{D}{d} \quad 2.) \ell_2 = \ell - \ell_1$$

$$4 \Rightarrow 3.) \frac{M_1}{I_{p1}} \frac{\ell_1}{G} = \frac{M_1}{I_{p1}} \frac{D}{d} \frac{\ell - \ell_1}{G}$$

$$\ell_1 \frac{d}{D} = \ell - \ell_1$$

$$\boxed{\ell_1 = \frac{\ell}{1 + \frac{d}{D}} = \frac{90}{1 + \frac{80}{100}} = 50 \text{ mm}}$$

$$2.) \boxed{\ell_2 = \ell - \ell_1 = 90 - 50 = 40 \text{ mm}}$$

$$1.) M_2 = M - M_1$$

$$1 \Rightarrow 4.) \frac{M_1}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{M - M_1}{I_{p2}} \frac{d}{2}$$

$$M_1 \frac{I_{p2} D}{I_{p1} d} = M - M_1$$

$$\boxed{M_1 = \frac{M}{1 + \frac{I_{p2} D}{I_{p1} d}} = \frac{20}{1 + \frac{4,021}{9,817} \frac{100}{80}} = 13,23 \text{ kNm}}$$

$$1.) \boxed{M_2 = M - M_1 = 20 - 13,23 = 6,77 \text{ kNm}}$$

$$4.) \boxed{\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_1}{I_{p1}} \frac{D}{2} = \frac{13,23 \cdot 10^6}{9,817 \cdot 10^6} \frac{100}{2} = 67,38 \text{ MPa}}$$

Megjegyzés:

Négy egyenletet tudunk felírni: a nyomatéki egyensúlyt, az  $\ell_1$  és  $\ell_2$  hosszak összegét, a szögelfordulások egyenlőségét és a feszültségek egyenlőségét. A feszültségek egyenlőségéből megkapjuk a részhosszak arányát, majd a teljes hossz felhasználásával az  $\ell_1$  és  $\ell_2$  értékeket. Innentől a megoldás már olyan, mint amit a 3. példában alkalmaztunk.